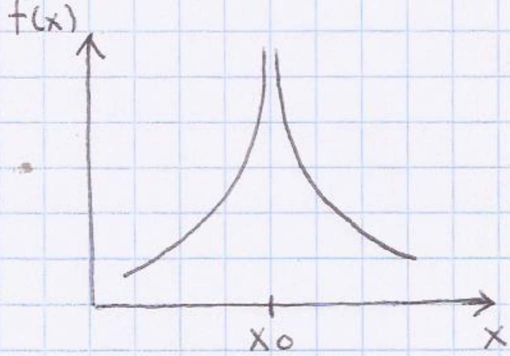
Propiedades requeridas para las eigenfunciones (Sección 5.6 Eisberg-Resnick

- De acuerdo a la sección 5.7 del Eisberg-Resnick, pag. 194, (Esta sección se dejará como lectura obligatoria para los estudiantes) se puede mostrar que la cuantización de la energía aparece en la teoría de Schrödinger.

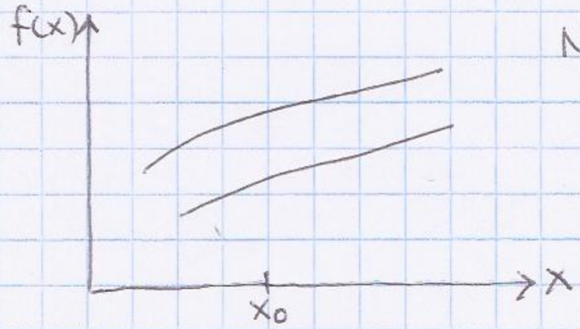
- La cuantización resulta del hecho de que solamente es posible encontrar soluciones aceptables de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para ciertos valores de la energía total E.

- Para que una solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo sea aceptable se requiere la eigenfunción $\Psi(x)$ y su derivada $\frac{d\Psi(x)}{dx}$ tengan las siguientes propiedades:

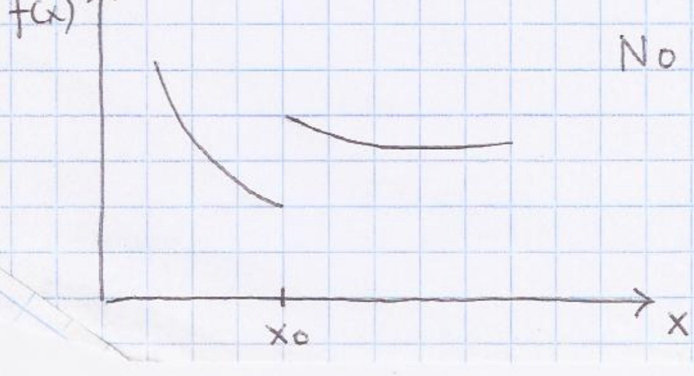
$\Psi(x)$ debe ser finita monovaluada contínua	$d\Psi(x)/dx$ debe ser finita monovaluada contínua



No finita en $x = x_0$



No monovaluada



No contínua en $x = x_0$

Si ψ o $\frac{d\psi}{dx}$ no fuesen finitas o no fuesen monovaluadas, $\Psi(x,t) = \psi(x)\, e^{-iEt/\hbar}$ o

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} = e^{-iEt/\hbar} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}$$ tampoco serían finitas

o monovaluadas.

Ya que la fórmula general para calcular valores esperados es

$$\overline{f(x,p,t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)\, f_{op}\left(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, t\right) \psi(x,t)\, dx$$

y por lo tanto el uso de $\Psi(x,t)$ y $\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x}$ es necesario para hacer estos cálculos, ni $\Psi(x,t)$ ni $\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x}$ pueden ser infinitas o no monovaluados porque eso haría que los valores esperados (asociados a cantidades medibles) dieran valores infinitos o valores no definidos lo cual no puede ser.

De esta forma, se concluye que $\psi(x)$ y $\frac{d\psi(x)}{dx}$ deben ser finitas y monovaluadas.

Además, $\psi(x)$ debe ser continua porque si no lo fuese, entonces la primera derivada de $\psi(x)$, es decir, $\frac{d\psi}{dx}$, no sería finita.

El último comentario que hay que hacer en relación a las propiedades requeridas es que $\frac{d\psi(x)}{dx}$ sea continua.

La ecuación de Schrödinger independiente de t se escribe como

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + V(x)\,\Psi(x) = E\,\Psi(x)$$

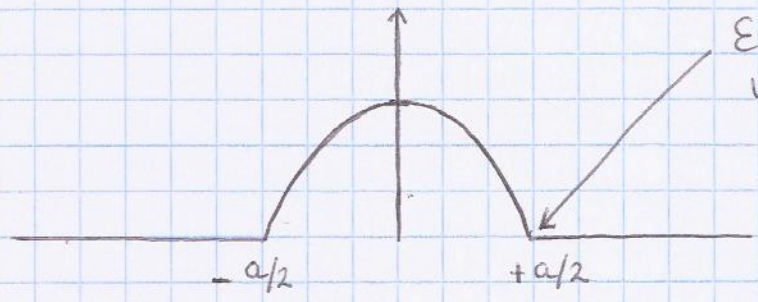
Esta ecuación puede escribirse

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\left[V(x) - E\right]\Psi(x)$$

Si $V(x)$, E y $\Psi(x)$ son finitas, $\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}$ debe ser finita.

Si $\frac{d\Psi(x)}{dx}$ no es continua, entonces $\frac{d^2\Psi}{dx^2}$ es infinita. Por lo tanto, si $V(x)$, E y $\Psi(x)$ son finitas, $\frac{d\Psi(x)}{dx}$ debe ser continua.

Comentario sobre el problema de la partícula en una caja 1-D



En este punto hay una discontinuidad en $\frac{d\Psi(x)}{dx}$

$\Downarrow$

$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}$ es infinita en ese punto.

Este problema es una idealización en la que se supone que el potencial $V(x)$ es infinito en el punto señalado lo que quiere decir que la partícula no puede penetrar "la pared de la caja". Un V infinito y positivo significa una repulsión infinita lo cual idealmente quiere decir que la partícula no sale de la caja.